# Geometrodynamik

F. Vollendorf

(Z. Naturforsch. **31 a**, 1155—1159 [1976]; eingegangen am 30. Juli 1976)

*Geometrodynamics*

This article is based upon the idea to solve the problem of combining the electromagnetic and the gravitational field by starting from Maxwell's theory.

It is shown that the theory of the Maxwell field can be generalized in such a way that Einstein's theory of gravitation becomes a special case of it. Finally we find field equations which refer only to geometric quantities.

## 1. Einleitung

Eine Arbeit von Booth [1] beruht auf dem interessanten Gedanken, die Theorie des elektromagnetischen Feldes mit der Einsteinschen Gravitationstheorie durch die Annahme zu verbinden, daß der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ einen als elektromagnetischen Feldtensor zu interpretierenden antisymmetrischen Anteil

$$\hat{F}_{\mu\nu} := \tfrac{1}{2}(g_{\mu\nu} - g_{\nu\mu}) \qquad (1)$$

enthält. Ein sehr ähnliches Ergebnis folgt aus einer vor kurzem veröffentlichten einheitlichen Feldtheorie [2].

Die folgenden Überlegungen dienen dem Hauptziel, den durch Gl. (1) ausgedrückten Zusammenhang zu klären. Weiterhin soll die erwähnte einheitliche Feldtheorie so formuliert werden, daß die Verwendung der in V [2] benötigten Cayley-Zahlen nicht mehr erforderlich ist.

Auf dieser Grundlage ergibt sich dann gegen alle Erwartung ein enger mathematischer Zusammenhang zwischen der Maxwellschen Theorie des elektromagnetischen Feldes und der Newtonschen Gravitationstheorie [3].

## 2. Das elektromagnetische Potential als geometrische Größe

Für die (spezielle) Relativitätstheorie ist die Annahme grundlegend, daß es in Raum und Zeit mindestens ein System von Koordinaten $x_\nu$ gibt, für welches die Gleichung eines Lichtkegels die folgende Form hat:

$$x_0{}^2 - \sum_{n=1}^{3} x_n{}^2 = 0 . \qquad (2)$$

Sonderdruckanforderungen an Dr. F. Vollendorf, Clemens-Brentano-Str. 1, *D-3550 Marburg 7.*

(Kleine lateinische Indizes laufen von 1 bis 3, griechische von 0 bis 3.)

Mit den Gleichungen

$$u^0 = x_0 , \quad u_0 = x_0 ,$$
$$u^n = x_n , \quad u_n = -x_n \qquad (3)$$

erhält man

$$\sum_{\nu=0}^{3} u^\nu u_\nu = 0 . \qquad (4)$$

Diese Gleichung legt die Einführung des Abstandsdifferentials $(\mathrm{d}s)$ für die Minkowskische Metrik nahe:

$$(\mathrm{d}s)^2 := -\sum_{\nu=0}^{3} \mathrm{d}u^\nu \, \mathrm{d}u_\nu .$$

Mit dem metrischen Tensor

$$h_{\mu\nu} := -\sum_{\lambda=0}^{3} u^\lambda{}_{,\mu} \, u_{\lambda,\nu} \qquad (5)$$

erhält man das kovariante Ergebnis

$$(\mathrm{d}s)^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} h_{\mu\nu} \, \mathrm{d}x_\mu \, \mathrm{d}x_\nu . \qquad (6)$$

Im folgenden soll dabei wie in Gl. (5) ein Komma die Differentiation nach den Koordinaten $x_\nu$ anzeigen.

Es ist nun leicht, Gl. (5) zu verallgemeinern. Man braucht nur die einschränkenden Bedingungen (3) fallen zu lassen und anzunehmen, daß $u^\nu$ und $u_\nu$ irgendwelche (differenzierbare) Funktionen von $x_\lambda$ sind:

$$u^\nu = u^\nu(x_\lambda) , \quad u_\nu = u_\nu(x_\lambda) . \qquad (7)$$

In diesem Fall verschwinden die Ausdrücke

$$w_0 := \tfrac{1}{2}(u_0 - u^0) , \quad w_n := \tfrac{1}{2}(u_n + u^n) \qquad (8)$$

nicht mehr identisch. Man kann außerdem sehen, daß der metrische Tensor (5) einen antisymmetrischen Anteil

$$h_{[\mu\nu]} := \tfrac{1}{2}(h_{\mu\nu} - h_{\nu\mu})$$

enthält. Zu seiner Berechnung ist es zweckmäßig, unter Benutzung der Definitionen

$$t := \tfrac{1}{2}(u^0 + u_0)\,, \quad v_\nu := \tfrac{1}{2}(u^\nu - u_\nu) \tag{9}$$

ein System spezieller Koordinaten zu benutzen:

$$x_0 = t\,, \quad x_n = v_n\,. \tag{10}$$

Mit (5) und (8) bis (10) erhält man

$$h_{[\mu\nu]} = F_{\nu\mu}\,, \tag{11}$$

wobei

$$F_{\mu\nu} := w_{\mu,\nu} - w_{\nu,\mu} \tag{12}$$

gesetzt worden ist.

Ein Vergleich von Gl. (12) mit der Theorie des elektromagnetischen Feldes legt es nahe, die Variablen $w_\nu$ als die Komponenten des elektromagnetischen Potentials zu interpretieren. Die Ausdrücke

$$J_\nu := w_{0,\nu,0} - w_{\nu,0,0} - \sum_{m=1}^{3} (w_{m,\nu,m} - w_{\nu,m,m}) \tag{13}$$

bedeuten dann die Komponenten der Stromdichte. Aus (13) folgt das Gesetz der Ladungserhaltung:

$$0 = J_{0,0} - \sum_{n=1}^{3} J_{n,n}\,.$$

Auf eine bemerkenswerte Ähnlichkeit zwischen Gl. (11) und dem Ansatz (1) von Booth soll hingewiesen werden.

## 3. Die Expansion des Weltalls

Die Gl. (4), welche als Gesetz eines Lichtkegels eingeführt wurde, erhält im allgemeinen Fall (7) eine völlig neue Bedeutung. Mit (8) und (9) ergibt sich

$$t^2 - \sum_{n=1}^{3} v_n{}^2 - w_0{}^2 + \sum_{n=1}^{3} w_n{}^2 = 0\,. \tag{14}$$

Es soll der Spezialfall betrachtet werden, daß die räumlichen Komponenten $w_n$ des elektromagnetischen Potentials verschwinden. Hierfür erhält man mit den Gln. (14), (4), (5), (6), (8) und (9) das Ergebnis

$$w_n = 0\,, \quad w_0 = -v_0\,, \quad t^2 = \sum_{\nu=0}^{3} v_\nu{}^2\,,$$
$$(\mathrm{d}s)^2 = \sum_{\nu=0}^{3} (\mathrm{d}v_\nu)^2 - t^{-2} \left(\sum_{\nu=0}^{3} v_\nu\, \mathrm{d}v_\nu\right)^2. \tag{15}$$

Damit wird aber eine dreidimensionale linear mit der Zeit $t$ expandierende Sphäre beschrieben. Auf diese Weise bekommt das elektrische Potential die Bedeutung einer vierten räumlichen Koordinate und d$s$ wird zu einem *räumlichen* Abstandsdifferential.

Die Gl. (14) wird als das Gesetz der Expansion des Weltalls interpretiert.

## 4. Die Geschwindigkeit des Lichts

Mit den Definitionen

$$z^0 := \tfrac{1}{2}(u^0 - u_0)\,, \quad z_0 := \tfrac{1}{2}(u_0 - u^0)\,,$$
$$z^n := u^n\,, \qquad z_n := u_n \tag{16}$$

nimmt Gl. (14) die Form (17) an:

$$t^2 = -\sum_{\lambda=0}^{3} z^\lambda z_\lambda\,. \tag{17}$$

Diese Gleichung legt die Einführung eines neuen metrischen Tensors nahe:

$$k_{\mu\nu} := -\sum_{\lambda=0}^{3} z^\lambda{}_{,\mu}\, z_{\lambda,\nu}\,.$$

Die Determinante

$$k := \det(k_{\mu\nu})$$

dieses Tensors läßt sich als Produkt zweier weiterer Determinanten $N$ und $Z$ darstellen:

$$N := \det(z^\lambda{}_{,\mu})\,, \quad Z := \det(z_{\lambda,\nu})\,, \tag{18}$$
$$k = N\,Z\,.$$

Aus (18) folgt, daß die beiden Ausdrücke

$$\Phi := -|\ln(Z/N)|\,, \quad c := \exp\Phi \tag{19}$$

unabhängig von der Wahl des Systems der Koordinaten $x_\nu$ sind. Die Variable $c$ erfüllt außerdem die Bedingung

$$0 \leqq c\,, \quad c \leqq 1\,.$$

Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, daß $c$ als Photongeschwindigkeit interpretiert werden kann.

Eine weitere von der Wahl des Systems der Koordinaten $x_\lambda$ unabhängige Größe ist das Volumen $V$ eines vierdimensionalen Gebietes $G$:

$$V := \int_G \sqrt{N\,Z}\, \mathrm{d}x_0\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_3\,. \tag{20}$$

## 5. Der Zusammenhang mit der Einsteinschen Gravitationstheorie

In der (speziellen) Relativitätstheorie wird angenommen, daß die Photongeschwindigkeit $c$ konstant ist:

$$c = 1\,. \tag{21}$$

Das Gesetz der geradlinigen Bewegung eines Photons ergibt sich dann aus dem Prinzip von Fermat:

$$\delta \int c^{-1}\, \mathrm{d}s = 0\,, \quad c = (\mathrm{d}s/\mathrm{d}t)\ . \tag{22}$$

Wenn man nun durch die Definition

$$(\mathrm{d}\tau)^2 := c(\mathrm{d}t)^2 - c^{-1}(\mathrm{d}s)^2 \tag{23}$$

eine raumzeitliche Metrik einführt, so erhält man aus dem Prinzip (22) die Bedingung für eine bezüglich der $(\mathrm{d}\tau)$-Metrik geodätische Linie [2] und zusätzlich die Gleichung

$$\mathrm{d}\tau = 0.$$

Der Übergang zur Einsteinschen Gravitationstheorie geschieht nun einfach dadurch, daß die einschränkende Bedingung (21) fallen gelassen wird.

Bei Berücksichtigung von (6), (5), (9), (16), (18) und (19) ist zu sehen, daß die $(\mathrm{d}\tau)$-Metrik (23) in dem allgemeinsten durch (7) festgelegten Fall eindeutig definiert ist.

Mit der Definition

$$g_{\mu\nu} := c\, t_{,\mu}\, t_{,\nu} - c^{-1}\, h_{\mu\nu} \tag{24}$$

nimmt Gl. (23) die übliche Form an:

$$(\mathrm{d}\tau)^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x_\mu\, \mathrm{d}x_\nu\,.$$

Aus (11) folgt, daß der $g_{\mu\nu}$-Tensor (24) im allgemeinen Fall einen antisymmetrischen Anteil enthält:

$$g_{[\mu\nu]} = -c^{-1}\, F_{\mu\nu}\,.$$

Dieses Ergebnis stellt im wesentlichen den Ansatz (1) von Booth dar.

## 6. Dreidimensional kovariante Fassung der Newtonschen Gravitationstheorie

Für ein durch die Bedingung

$$|\Phi| \ll 1$$

eingeschränktes schwaches Gravitationsfeld liefert (19) die Näherung

$$c \approx 1 + \Phi\,.$$

In gleicher Näherung nimmt hierfür die $(\mathrm{d}\tau)$-Metrik (23) die folgende Form an:

$$(\mathrm{d}\tau)^2 \approx (1+\Phi)\,(\mathrm{d}t)^2 - (1-\Phi)\,(\mathrm{d}s)^2\,.$$

Es läßt sich unmittelbar ablesen [5], daß in der betrachteten Näherung der Ausdruck

$$U := \tfrac{1}{2}\,\Phi \tag{25}$$

mit dem Newtonschen Gravitationspotential übereinstimmt. Da die Größe $\Phi$ von der Wahl des Systems der Koordinaten $x_\lambda$ unabhängig ist, soll sie als das invariante Gravitationspotential bezeichnet werden.

Für die Newtonsche Gravitationstheorie ist die Einführung einer absoluten Zeit grundlegend. Da die durch (9) definierte Variable $t$ gegenüber den in einer Arbeit IV untersuchten Symmetrie-Transformationen [4] invariant ist, kann sie als ein absolutes Newtonsches Zeitmaß interpretiert werden.

Wenn nun die zeitliche Koordinate $x_0$ durch die Bedingung

$$x_0 = t \tag{26}$$

festgelegt wird, so reduziert sich Gl. (6) für

$$\mathrm{d}t = 0$$

unter Benutzung der Definition eines Newtonschen Tensors

$$H_{mn} := \tfrac{1}{2}(h_{mn} + h_{nm}) \tag{27}$$

zu der folgenden Gleichung:

$$(\mathrm{d}s)^2 = \sum_{m,n=1}^{3} H_{mn}\, \mathrm{d}x_m\, \mathrm{d}x_n\,.$$

Über die durch

$$H := \det(H_{mn})\,, \quad \sum_{l=1}^{3} H^{ml} H_{ln} = \delta_{mn} \tag{28}$$

definierten Größen $H$ und $H^{ml}$ ist ein verallgemeinerter von der Wahl der räumlichen Koordinaten $x_n$ unabhängiger Laplace-Operator [6] festgelegt:

$$\Delta := H^{-\frac{1}{2}} \sum_{m,n=1}^{3} (\partial/\partial x_m)\, H^{\frac{1}{2}} H^{mn} (\partial/\partial x_n)\ .$$

Mit Gl. (25) ergibt sich die Vermutung, daß die mit der Gravitationskonstante $\gamma$ definierte Größe

$$\mu := (1/8\,\pi\,\gamma)\,\Delta\Phi \tag{29}$$

die Dichte der (aktiv-schweren) [7] Masse bedeutet [8]. Gleichung (29) stellt die kovariante Verallgemeinerung der Poisson-Gleichung dar.

Eine kugelsymmetrische Lösung der verallgemeinerten Laplace-Gleichung

$$\Delta\Phi = 0 \tag{30}$$

soll angegeben werden. Zu diesem Zweck wird unter Benutzung einer positiven reellen Konstante $a$ ein Spezialfall zu (7) betrachtet:

$$\begin{aligned} u^0 &= 2\,x_0\,, & u_0 &= 0\,, \\ u^n &= (a/r)\,x_n + x_n\,, & u_n &= (a/r)\,x_n - x_n\,, \\ r^2 &:= \sum_{n=1}^{3} x_n{}^2\,, & r &> a\,. \end{aligned} \tag{31}$$

Das Expansionsgesetz (14) ist für $r \ll x_0$ näherungsweise erfüllt. Die Gln. (5), (27), (28) und (19) liefern

$$h_{mn} = [1 - (a^2/r^2)]\, \delta_{mn} + (a^2/r^4)\, x_m\, x_n\,, \quad (32)$$

$$\sqrt{H}\, H^{mn} = \delta_{mn} - (a^2/r^4)\, x_m\, x_n\,, \quad \sqrt{H} = 1 - (a^2/r^2)\,,$$
$$c = (r - a/r + a)\,, \quad \Phi = \ln(r - a/r + a)\,. \quad (33)$$

Damit reduziert sich Gl. (29) schrittweise zu

$$\sqrt{H}\,\mu = \frac{1}{8\pi\gamma} \sum_{m,n=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_m} \cdot \left(\delta_{mn} - \frac{a^2}{r^4}\, x_n\, x_m\right) \frac{\partial}{\partial x_n} \ln\left(\frac{r-a}{r+a}\right),$$

$$\sqrt{H}\,\mu = -\sum_{m=1}^{3} (\partial/\partial x_m)\, (-a\, x_m/4\,\pi\,\gamma\, r^3)\,.$$

Die Divergenz der Newtonschen Gravitationsfeldstärke $(-a\, x_m/4\,\pi\,\gamma\, r^3)$ hat den Wert Null:

$$\mu = 0\,.$$

Mit (31) reduziert sich (23) zur Schwarzschildschen Metrik [2].

Mit diesem Ergebnis kommt man zu dem Schluß, daß die Einsteinsche und die kovariant formulierte Newtonsche Gravitationstheorie zwei Seiten einer einzigen an Begriffen reichhaltigeren Theorie darstellen.

## 7. Feldgleichungen

Das einfachste mit den entwickelten Hilfsmitteln invariant formulierbare Extremalprinzip lautet

$$\delta V = 0\,, \quad V := \int \sqrt{N\,Z}\; \mathrm{d}x_0\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_3\,, \quad (34)$$

wobei $V$ das durch (20) eingeführte Volumen ist. Aus (18) und den Definitionen (35) folgen die Beziehungen (36):

$$p_\lambda := \tfrac{1}{2}(z^\lambda + z_\lambda)\,,$$
$$q_\lambda := \tfrac{1}{2}(z^\lambda - z_\lambda)\,, \quad (35)$$
$$N = \mathrm{Det}(p_{\lambda,\nu} + q_{\lambda,\nu})\,,$$
$$Z = \det(p_{\lambda,\nu} - q_{\lambda,\nu})\,. \quad (36)$$

Mit (16) erhält man

$$p_0 = 0\,. \quad (37)$$

Um Feldgleichungen aus (34) zu gewinnen, muß festgelegt werden, welche Größen variiert werden sollen. Es gibt hierzu zwei ausgezeichnete Möglichkeiten.

Im ersten Fall variiert man die Variablen $p_n$. Dann ergeben sich bei Beachtung von (19) die drei Gleichungen (38):

$$\sum_{\nu=0}^{3} (\partial/\partial x_\nu)\, \hat{L}_{m\nu} = 0\,, \quad (38)$$

$$\hat{L}_{m\nu} := \tfrac{1}{2}[c(\partial N/\partial p_{m,\nu}) + c^{-1}(\partial Z/\partial p_{m,\nu})]\,.$$

Für den speziellen Fall zu (31) erhält man

$$\hat{L}_{m0} = 0\,, \quad \hat{L}_{00} = 0\,, \quad \hat{L}_{0n} = 0\,,$$
$$\hat{L}_{mn} = (a/r^3)\, [x_m\, x_n - r^2\, \delta_{mn}]\,,$$

womit (38) *nicht* erfüllt ist.

Im zweiten Fall werden die Größen $q_\nu$ variiert. Damit gelangt man auf entsprechende Weise auf vier Feldgleichungen (39):

$$\sum_{\nu=0}^{3} (\partial/\partial x_\nu)\, L_{\mu\nu} = 0\,, \quad (39)$$

$$L_{\mu\nu} := \tfrac{1}{2}[c(\partial N/\partial q_{\mu,\nu}) + c^{-1}(\partial Z/\partial q_{\mu,\nu})]\,. \quad (40)$$

Der Ansatz (31) liefert in diesem Fall

$$L_{m0} = 0\,, \quad L_{00} = \sqrt{1 - (a^2/r^2)}\,, \quad L_{0n} = 0\,,$$
$$L_{mn} = \delta_{mn} - (a^2/r^4)\, x_m\, x_n\,.$$

Damit ist Gl. (39) erfüllt, womit auch geklärt ist, daß die Variablen $q_\nu$ zu variieren sind [9].

Mit (36) folgt

$$\sum_{\nu=0}^{3} (\partial N/\partial q_{\mu,\nu})_{,\nu} = 0\,, \quad \sum_{\nu=0}^{3} (\partial Z/\partial q_{\mu,\nu})_{,\nu} = 0\,.$$

Damit liefert eine Umformung von (39) bei Beachtung von (19) zwei weitere Formen der Feldgleichungen:

$$\sum_{\nu=0}^{3} [(\partial \ln N/\partial q_{\mu,\nu}) - (\partial \ln Z/\partial q_{\mu,\nu})]\, (\partial c/\partial x_\nu) = 0\,, \quad (41)$$

$$\sum_{\nu=0}^{3} (\partial \Phi/\partial q_{\mu,\nu})\, (\partial \Phi/\partial x_\nu) = 0\,. \quad (42)$$

Für kosmologische Überlegungen ist es interessant, daß sich für das Modell (15) eines leeren expandierenden Universums $\Phi = 0$ und $c = 1$ ergibt, womit die Feldgleichungen in der Form (41) bzw. (42) erfüllt sind.

## 8. Schlußfolgerung

Für die sieben durch (16) eingeführten Variablen $z^n$, $z^0 = -z_0$ und $z_n$ wurden vier Feldgleichungen (39) formuliert, welche die Form von Erhaltungsgesetzen haben. Es wird nun eine Lösung

$$z^n = z^n(x_\lambda)\,, \quad z^0 = z^0(x_\lambda)\,, \quad z_n = z_n(x_\lambda)$$

der Feldgleichungen betrachtet. Bei Beachtung von (16), (17) und (9) zeigt sich, daß hiermit auch die Variablen $u^\nu$ und $u_\nu$ als Funktionen von $x_\lambda$ festgelegt sind:

$$u^\nu = u^\nu(x_\lambda)\,, \quad u_\nu = u_\nu(x_\lambda)\,. \tag{7}$$

Auf dieser Grundlage lassen sich mit Hilfe der Gln. (12), (24) und (29) der Tensor $F_{\mu\nu}$ des elektromagnetischen Feldes, der Tensor $g_{\mu\nu}$ der Einsteinschen Metrik und auch die Dichte $\mu$ der (aktivschweren) Masse berechnen.

Es erscheint daher gerechtfertigt, in dem Ergebnis (39) die Feldgleichungen einer Geometrodynamik [10] zu sehen.

[1] D. J. Booth, Int. J. Theor. Phys. **14**, 67 [1975].

[2] F. Vollendorf, Z. Naturforsch. **31 a**, 225 [1976]; zitiert als Arbeit V.

[3] Die gruppentheoretische Seite dieses Ergebnisses wurde in einer Arbeit IV untersucht [4].

[4] F. Vollendorf, Z. Naturforsch. **30 a**, 1510 [1975]; zitiert als Arbeit IV.

[5] V. Fock, Theorie von Raum, Zeit und Gravitation, Akademie-Verlag, Berlin 1960.

[6] A. Lichnerowicz, Einführung in die Tensoranalysis, Bibliographisches Institut, Mannheim 1966.

[7] M. Jammer, Der Begriff der Masse in der Physik, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1964.

[8] Die Einsteinschen Gleichungen für den Energie-Impuls-Tensor legen bei gegebener Metrik die Dichte der trägen Masse fest.

[9] In einer Arbeit V wurden die Größen $w_n = p_n$ variiert [2]. Die Schwarzschildsche Metrik ergab sich nur, weil in Gl. (22) ein Vorzeichenfehler unterlief. Die vorliegende Arbeit schließt diese in V entstandene Begründungslücke.

[10] J. A. Wheeler, Einsteins Vision, Springer-Verlag, Berlin 1968.